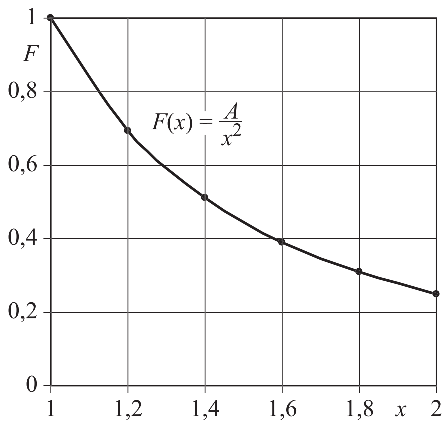


Rys. 6.10. Zależność siły od odległości, $A = 1$

Przypuśćmy, że ładunki się przyciągają. Jaką pracę należy wykonać, aby oddalić je od siebie od odległości a do odległości b? Wykorzystamy w tym celu wzory 6.28, 6.29 i 5.9. Napiszemy, że pracę określa całka oznaczona, którą można przedstawić jako różnicę dwóch wyrażeń na całkę nieoznaczoną.

Całka nieoznaczona z funkcji 6.29 ma postać (wzór 5.9, uwaga na zmianę znaczenia symbolu F!):

(6.30) $$w(x) = \int dx\, F(x) = A\int dx \frac{1}{x^2} = -\frac{A}{x}.$$

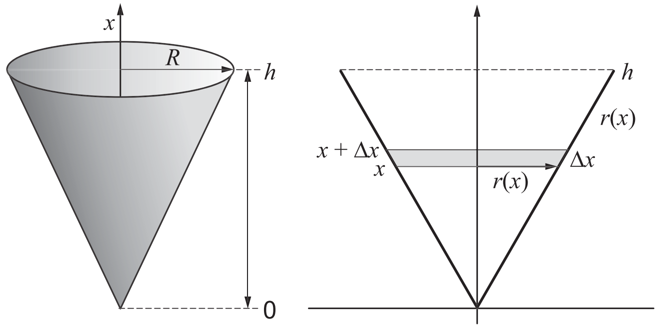
Interesująca nas praca jest więc równa różnicy dwóch wartości całki nieoznaczonej:

(6.31) $$W(a,b) = \int_a^b dx\, F(x) = w(b) - w(a) = -\frac{A}{b} - \left(-\frac{A}{a}\right) = A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

6.5. Zastosowanie 3: objętość brył obrotowych

Postawienie problemu

Rachunek całkowy ma także zastosowania całkiem praktyczne: umożliwia na przykład obliczanie objętości brył obrotowych, takich jak dębowe beczki. Przypuśćmy, że znamy zależność promienia takiej bryły r od wysokości x, czyli funkcję $r(x)$ (rys. 6.11). Możemy myślowo podzielić bryłę na poziome plastry o grubości Δx. Objętość plastra zawartego pomiędzy x a $x + \Delta x$ jest w przybliżeniu równa objętości ΔV walca o promieniu $r(x)$ i wysokości Δx. Pole podstawy takiego walca jest równe $S = \pi r^2$, a więc objętość jest równa:



Rys. 6.11. Obliczamy objętość stożka

(6.32) $$\Delta V = \Delta x \cdot \pi r^2(x).$$

Cała objętość jest sumą takich objętości cząstkowych, czyli całką oznaczoną

(6.33) $$V = \int_a^b dx\, \pi r^2(x) = \pi \int_a^b dx\, r^2(x),$$

gdzie *a* oznacza położenie „denka" naszej bryły, a *b* położenie jej „wieczka".

PRZYKŁAD 1

Zastosujmy ten wzór do stożka o wysokości *h* z rysunku 6.11, dla którego zależność $r(x)$ określona jest wzorem:

(6.34) $$r(x) = cx.$$

Przyjmiemy, że $a = 0$ i $b = h$. Objętość stożka jest więc równa (§5.2):

(6.35) $$V = \pi \int_0^h dx\, r^2(x) = \pi \int_0^h dx\, c^2 x^2 = \pi c^2 \int_0^h dx\, x^2 = \pi c^2 \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^h = \\ = \frac{\pi c^2}{3} (x^3)_0^h = \frac{\pi c^2 h^3}{3}.$$

Zauważmy jeszcze, że *ch* jest równe promieniowi podstawy stożka *R*, a πR^2 jest polem powierzchni tej podstawy. Wzór 6.35 możemy więc napisać w postaci:

(6.36) $$V = \frac{\pi c^2 h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{Sh}{3}.$$

Objętość stożka jest równa jednej trzeciej objętości walca o takim samym polu podstawy.